CLASE 16. Singularidades y Residuos

Definición 16.1 (Punto Singular o Singularidad)**.** Un punto z_0 se dice punto singular (o singularidad) de la función (compleja) $f(z)$ si f no es derivable en z_0 pero cada entorno de z_0 contiene al menos un punto z_1 en el cual f es analítica.

Definición 16.2 (Singularidad Aislada)**.** Se dice que z_0 es un punto singular aislado (singularidad aislada) de f si f no es derivable en z_0 pero existe un *entorno reducido* de z_0 en donde f es analítica, es decir, f es analítica en $\mathcal{N}'(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < \epsilon, \ \epsilon > 0\}$.

Ejemplo 16.3. La función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$ es analítica en $\mathbb{C}$ excepto en los puntos $z_1 = i, z_2 = -i$. Ambos puntos son singularidades aisladas de f.

Ejemplo 16.4. La función $g(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{z})}$ tiene un número infinito de singularidades aisladas. Estas son $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

El punto $z = 0$ es un punto singular pero no es aislado ya que todo entorno de $z = 0$ contiene un número infinito de puntos singulares.

16.1 Clasificación de Singularidades

Supongamos que z_0 es un punto singular aislado de la función f y que z_1 es el punto singular de f más próximo a z_0. Sea $r > 0$ la distancia entre ellos. Como f es analítica en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < r\}$, entonces, por el Teorema de Laurent (Teorema 15.12) se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall \, z \in \mathcal{D},$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Definición 16.5 (Parte Principal)**.** La parte principal de f en el punto singular aislado z_0 es aquella parte de la serie que envuelve las potencias negativas de $(z - z_0)$, es decir

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots$$

y el coeficiente importante es a_{-1}, al cual llamaremos el residuo de f en z_0 y escribiremos

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} \overset{(1)}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)\, \mathrm{d}w.$$

Aparecen sólo 3 tipos de puntos singulares aislados, estudiando la parte principal de la serie:

Singularidad Removible Supongamos que todos los coeficientes correspondientes a potencias negativas valen cero, es decir, $a_n = 0 \quad \forall\, n = -1, -2, \ldots$ En forma equivalente, ningún coeficiente a_{-m} es distinto de cero $(m = 1, 2, \ldots)$. En este caso se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \quad (\text{en } 0 < |z - z_0| < r).$$

Definiendo (o redefiniendo) $f(z_0)$ como $a_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)$ se tiene que f es analítica en el disco $|z - z_0| < r$. Por ésta razón, a las singularidades de éste tipo se les llama singularidad removible.

Ejemplo 16.6. La función $g(z)$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & z \neq 0 \\ 3 & z = 0 \end{cases}$$

tiene una serie de potencias para $|z| > 0$ dada por

$$g(z) = 3 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

Como $\lim_{z \to 0} g(z) = 3$, podemos remover la singularidad en $z = 0$ para así obtener una función entera $f(z) = g(z)$ si $z \neq 0$ y $f(0) = \lim_{z \to 0} \dfrac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots}{z} = 1.$

Singularidad Esencial En la parte principal, un número infinito de los a_{-n}, $n = 1, 2, \ldots$ son diferentes de cero. En este caso se dice que z_0 es un punto singular esencial.

Ejemplo 16.7. La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ para $|z| > 0$ tiene una serie de Laurent dada por

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots$$

Así, $z = 0$ es una singularidad esencial.

Polo En la parte principal, todos los a_{-n} valen cero, excepto un número finito (positivo) de ellos (al menos uno de ellos es no-nulo). Equivalentemente, sólo un número finito (mayor o igual que 1) de coeficientes a_{-m} es distinto de cero. Luego, existe un $m \in \mathbb{N}$ ($m > 0$) tal que $a_{-m} \neq 0$ y $a_k = 0$ para todo $k < -m$. En este caso se dice que z_0 es un polo de orden m (o un polo de multiplicidad m) de la función f. La serie de Laurent toma la forma

$$f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad (a_{-m} \neq 0).$$

En particular, si $m = 1$ se hablará de un polo simple.

Ejemplo 16.8. La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}$ para $|z| > 0$ tiene una serie de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}z^2 + \cdots$$

Así, $z = 0$ es un polo de orden 2.

Podemos caracterizar los polos de las funciones de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema 16.9. *Sea $f(z)$ una función analítica en un entorno del punto z_0, excepto en dicho punto. Entonces f tiene en z_0 un polo de orden m, $m \in \mathbb{N}$, si y sólo si la función $\lambda(z)$ dada por*

$$\lambda(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

tiene una singularidad removible en z_0 y $\lim_{z \to z_0} \lambda(z) \neq 0$.

Prueba. ($\Rightarrow$) Si f tiene un polo de orden m entonces

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

con $a_{-m} \neq 0$.

Multiplicando por $(z - z_0)^m$ se obtiene

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} \quad (z \neq z_0).$$

Luego, $\lambda(z) = (z-z_0)^m f(z)$ cumple

$$\lambda(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} \quad (\text{para } z \neq z_0),$$

así que que $\lambda(z)$ tiene una singularidad removible en $z = z_0$ y $\lim_{z\to z_0} \lambda(z) = a_{-m} \neq 0$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición sobre $\lambda(z) = (z-z_0)^m f(z)$. Como $\lambda(z)$ tiene una singularidad removible, su serie de Laurent en un entorno de z_0 tiene coeficientes c_{-n} iguales a cero ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Luego,

$$(z-z_0)^m f(z) = \lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Así,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^{-m}\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^{-m+n} \\ &= \frac{c_0}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{(z-z_0)} + c_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-m}. \end{aligned}$$

Como $c_0 = \lim_{z\to z_0} \lambda(z) \neq 0$, vemos que f tiene un polo de orden m en z_0. $\square$

***Observación* 16.10.** Directamente de nuestra clasificación obtenemos los siguientes resultados:

- Si z_0 es una singularidad removible de $f(z)$ entonces
  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$ y, por tanto,
  $$\lim_{z\to z_0} |f(z)| \text{ existe (y es igual a } |a_0|).$$

- Si z_0 es un polo de orden m entonces
  $f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (con $a_{-m} \neq 0$)
  y, en consecuencia,
  $$\begin{aligned} &\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)^j f(z)| = +\infty \quad \forall\, j = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ &\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)^m f(z)| = |a_{-m}| \neq 0 \\ &\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)^k f(z)| = 0 \quad \forall\, k = m+1, m+2, \ldots \end{aligned}$$

- Si z_0 es una singularidad esencial de $f(z)$ entonces

$$\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)^k f(z)| = +\infty \quad \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots$$

16.2 Ceros (o Raíces) de Funciones Analíticas

Definición 16.11 (Cero de una función analítica)**.** Si la función $f(z)$ es analítica en un dominio $\mathcal{D}$ y el punto z_0 está en $\mathcal{D}$ entonces para cada disco $\{z \in \mathcal{D} \ : \ |z-z_0| < R\}$ (contenido en $\mathcal{D}$) es válido el desarrollo (en serie de Taylor)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Si $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ y si $a_m \neq 0$ entonces

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

y podemos escribir que

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^m \left[a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \cdots\right] \\ &= (z-z_0)^m \lambda(z). \end{aligned}$$

Se dirá en este caso que f tiene un cero de orden (o multiplicidad) m en $z = z_0$.

De ésta manera,

Teorema 16.12. *El punto z_0 es un cero de orden m de una función analítica $f(z)$ si y sólo si $f(z) = (z-z_0)^m\lambda(z)$, donde $\lambda(z)$ es una función analítica en un entorno de z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$.*

Estamos interesados en estudiar y caracterizar los ceros de las funciones analíticas porque podemos relacionar polos con ceros de funciones analíticas. En efecto, gracias al Teorema 16.9, tenemos

Teorema 16.13. *El punto z_0 es un polo de orden m de $f(z)$ si y sólo si*

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\lambda(z),$$

para alguna función $\lambda(z)$ analítica en un entorno de z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$.

***Observación* 16.14.** Si f es analítica en un entorno de z_0, $f \not\equiv 0$ y z_0 es un cero de f entonces existe un entorno reducido de z_0 que no contiene otros ceros de f. En otras palabras, *los ceros de f son aislados*:

Tenemos que $f(z) = (z - z_0)^m \lambda(z)$, siendo λ analítica y $\lambda(z_0) \neq 0$, así que λ es continua en un entorno de z_0. Luego, para $\varepsilon = \frac{|\lambda(z_0)|}{2}$ existe un entorno $\mathcal{N}(z_0, \delta)$ de z_0, $\mathcal{N}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < \delta\}$, tal que si $z \in \mathcal{N}(z_0, \delta)$ entonces $|\lambda(z) - \lambda(z_0)| < \varepsilon$. De esta manera,

$$|\lambda(z)| = |\lambda(z_0) - (\lambda(z_0) - \lambda(z))| \geq |\lambda(z_0)| - |\lambda(z) - \lambda(z_0)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

para $z \in \mathcal{N}(z_0, \delta)$, de donde concluimos que $\lambda(z) \neq 0$ en $\mathcal{N}(z_0, \delta)$.

Luego, $\mathcal{N}'(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < \delta\}$ es un entorno reducido de z_0 en donde $f(z) = (z - z_0)^m \lambda(z)$ no se anula.

16.3 Residuos

Comenzamos recordando la definición dada (Definición 16.5) de Residuo:

Sea z_0 un punto singular aislado de la función f. Sea z_1 la singularidad de f mas próxima a z_0 y sea R la distancia entre ellos. Entonces f es analítica en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < R\}$ y por el teorema de Laurent se tiene

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \ z \in \mathcal{D} \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

tomando C, por ejemplo, como la circunferencia $\mathrm{C}_r(z_0)$ de centro z_0 y radio $0 < r < R$.

Definición 16.15 (Residuo)**.** El coeficiente $a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C f(z) \, \mathrm{d}z$ es llamado el residuo de f en z_0 y se denota por $\mathrm{Res}(f(z), z_0)$.

El siguiente teorema de Cauchy es muy importante.

Teorema 16.16 (Residuos)**.** *Sea C una curva simple cerrada, orientada positivamente, y sea $\mathcal{D}$ un conjunto abierto que contiene a C y a su región interior. Si f es analítica en $\mathcal{D}$, excepto (a lo sumo) en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$ contenidos en la región interior definida por C entonces*

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z), z_n).$$

Prueba. Aplicamos el teorema de la deformación con circunferencias $C_1, C_2, \ldots, C_N$ centradas en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_N$ respectivamente y de radios suficientemente pequeños (ver figura 1) de manera que estén contenidas en la región interior a C y no se intersecten. Todas con la misma orientación de C.

Figura 1: Aplicando el teorema de la deformación para obtener el teorema de los residuos.

Se tiene entonces que $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N} \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z$ y así

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N} 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_n) = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}(f(z), z_n),$$

ya que $\operatorname{Res}(f(z), z_i) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_i} f(z)\ \mathrm{d}z$, $i = 1, 2, \ldots, N$ (ver Definición 16.15). □

Podemos calcular el residuo de una función f en un polo z_0 de orden m con facilidad.

Teorema 16.17. *Sea f una función analítica en un entorno reducido de z_0. Si z_0 es un polo de orden m de $f(z)$ entonces*

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

Prueba. Por tener f un polo de orden m en z_0 es

$$f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \quad (a_{-m} \neq 0).$$

Luego,

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m}.$$

Derivando $(m-1)$ veces para obtener a_{-1} es

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\,z^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!a_{-1} + \text{suma de términos con potencias de } (z-z_0).$$

Tomando límite a ambos lados:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!\,\mathrm{Res}(f(z), z_0)$$

es decir,

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\,z^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

□

En particular, si z_0 es un polo simple $(m=1)$ será $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)f(z)]$.

En la práctica el siguiente resultado es importante.

Teorema 16.18. *Consideremos dos funciones $p(z), q(z)$ analíticas en un entorno de z_0 con $p(z_0) \neq 0$. Sea $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$. Entonces:*

a) *$f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si z_0 es un cero de $q(z)$ de orden m.*

b) *Si z_0 es un polo simple de f (cero de $q(z)$ de multiplicidad 1) entonces*

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

c) *Si z_0 es un polo doble $(m=2)$ de f entonces*

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2}.$$

Prueba. a) Si z_0 es un cero de $q(z)$ de orden m entonces podemos escribir $q(z) = (z-z_0)^m \lambda(z)$ con $\lambda(z_0) \neq 0$ y $\lambda(z)$ analítica en un entorno de z_0. Luego,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z-z_0)^m \lambda(z)} \quad \text{y}$$
$$(z-z_0)^m f(z) = \frac{p(z)}{\lambda(z)}.$$

Esta función $\dfrac{p(z)}{\lambda(z)}$ es analítica en un entorno de z_0 ya que $\lambda(z_0) \neq 0$ (y tanto $p(z)$ como $\lambda(z)$ son analíticas en un entorno de z_0).

Calculando el límite

$$\lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^m f(z)] = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\lambda(z)} = \frac{p(z_0)}{\lambda(z_0)} \neq 0$$

y $f(z)$ tiene, entonces, un polo de orden m en z_0.

Recíprocamente, si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ tiene en z_0 un polo de orden m , entonces se tiene que

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m},$$

con $\lambda(z_0) \neq 0$ y $\lambda(z)$ analítica en un entorno de z_0. Escribimos

$$q(z) = (z-z_0)^m \left[\frac{p(z)}{\lambda(z)} \right].$$

Esta función $\dfrac{p(z)}{\lambda(z)}$ es analítica en un entorno de z_0 ya que $\lambda(z_0) \neq 0$. Como $\dfrac{p(z_0)}{\lambda(z_0)} \neq 0$ entonces $q(z)$ tiene en z_0 un cero de orden m.

b) Por ser z_0 cero simple de $q(z)$, podemos escribir

$$q(z) = c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots = q'(z_0)(z-z_0) + \frac{q''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \cdots,$$

con $c_1 = q'(z_0) \neq 0$. Así, $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{q(z)}{z-z_0} = q'(z_0)$. Luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}[f(z), z_0] &= \lim_{z \to z_0} [(z-z_0) f(z)] = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)} \\
&= \frac{p(z_0)}{\lim_{z \to z_0} \left(\frac{q(z)}{z-z_0} \right)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.
\end{aligned}$$

c) Se deja como ejercicio.

□

Definición 16.19 (Función Meromorfa)**.** Se dice que la función $f(z)$ es meromorfa en el dominio $\mathcal{D}$ si f es analítica en $\mathcal{D}$ excepto en un número finito de puntos, en los cuales tiene polos.

Ejemplo 16.20. Considere la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-1)}$.

a) Obtenga 4 términos de la serie de Laurent de f en potencias de z.

b) Calcular $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-1)}\,\mathrm{d}z$, si C es la circunferencia $|z| = 2$ recorrida en sentido positivo.

Solución.

a) Escribiendo el desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen} z$ (en $\mathbb{C}$) es

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \\ \frac{\operatorname{sen} z}{z} &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

Usando la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ en $|z| < 1$ es

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots).$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\operatorname{sen} z}{z}\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{z^2} \\ &= -\frac{1}{z^2}\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\right]\left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{z^2}\left[1 + z + \left(1 - \frac{1}{6}\right)z^2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)z^3 + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{5}{6} - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)z + \cdots \end{aligned}$$

b) En $z = 0$ hay un polo de orden 2 y

$$\operatorname{Res}(f, 0) = c_{-1} = -1.$$

También

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{\operatorname{sen} z}{z^3\,(z-1)}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{\operatorname{sen} z}{z^3}=\operatorname{sen} 1.$$

Como $z_1=0$ y $z_2=1$ son los puntos singulares de f (y ambos están en $|z|\leq 2$), será

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i[\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(1)]=2\pi i[\operatorname{sen} 1-1].$$

Ejemplo 16.21. Calcule $\displaystyle\int_C \frac{z^2\,e^{imz}}{(z^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}z$ si C es la circunferencia $|z-bi|=b$, $b>0$ y m es un número real (la orientación es anti-horaria).

Solución. Los polos de $f(z)=\dfrac{z^2\,e^{imz}}{(z^2+b^2)^2}$ son $z_1=bi$ y $z_2=-bi$. En la región interior (encerrada por C), solo está z_1, que es el centro de la circunferencia. Además, z_1 es un polo de orden 2 y calculando el residuo de f en z_1 será

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z),bi)&=\lim_{z\to bi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2e^{imz}}{(z+bi)^2}\right]\\&=\lim_{z\to bi}\frac{2[z(z+bi)-z^2]\,e^{imz}}{(z+bi)^3}=\frac{e^{-mb}(1-mb)}{4ib}.\end{aligned}$$

Así,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname{Res}(f,bi)=\frac{\pi(1-mb)\,e^{-mb}}{2b}.$$

Ejemplo 16.22. a) Clasifique los puntos singulares de la función $f(z)=\dfrac{(1-e^z)\operatorname{sen} z}{z^4(z+1)}$.

b) Hallar los residuos de f en cada uno de sus puntos singulares.

c) Calcule $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, siendo C la circunferencia dada por $|z|=\frac{1}{3}$ en sentido positivo.

Solución.

a) Escribimos las series de potencias alrededor del punto $z_0=0$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} z}{z}&=\frac{1}{z}\left[z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right]\\&=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\frac{1}{7!}z^6+\cdots.\end{aligned}$$

Además, de $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ es

$$\begin{aligned}\frac{1-e^z}{z} &= \frac{1}{z}\left[1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\right]\\ &= -1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3!}z^2 - \cdots\end{aligned}$$

También sabemos, usando la serie geométrica, que

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

en $|z| < 1$.

Así, $f(z)$ en potencias de z (entorno de $z = 0$) se escribe

$$f(z) = \left(\frac{1-e^z}{z}\right)\frac{\operatorname{sen} z}{z}\left(\frac{1}{z+1}\right)\frac{1}{z^2} = \frac{\lambda(z)}{z^2},$$

con $\lambda(0) = -1 \neq 0$. Por lo tanto, $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. También, calculando su serie de Laurent, multiplicando las series en potencias de z, se tiene

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z^2}\left[\left(-1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3!}z^2 - \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \cdots\right)(1 - z + z^2 - \cdots)\right]\\ &= \frac{1}{z^2}\left[-1 + \frac{1}{2}z + \cdots\right] = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \cdots\end{aligned}$$

b) Por lo hecho en la parte anterior, podemos afirmar que $f(z)$ tiene en $z = 0$ un polo de orden 2 y que $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$.

Las funciones $\frac{1-e^z}{z}$ y $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ son analíticas[1], por lo que f tiene sólo 2 polos: en $z = 0$, polo doble y en $z = -1$, polo simple. Calculamos,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z\to -1}\frac{(1-e^z)\operatorname{sen} z}{z^4} = (1 - e^{-1})\operatorname{sen}(-1)\\ \operatorname{Res}(f, -1) &= \left(\frac{1-e}{e}\right)\operatorname{sen}(1).\end{aligned}$$

c) En el interior de $|z| = \frac{1}{3}$ sólo está el polo $z = 0$, luego

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i\frac{1}{2} = \pi i.$$

[1] en realidad, estas funciones no son analíticas pero sólo tienen singularidades removibles (ambas en $z = 0$). Así, ambas funciones pueden ser re-definidas analíticamente. Es una práctica muy frecuente el reemplazar automáticamente las funciones con sólo singularidades removibles por sus funciones redefinidas analíticamente.